PART2　2 次関数の最大・最小(定義域の変化)

例題

$a>0$ とする。定義域が $0\leqq x\leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

$a>1$ とする。定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-6x-5$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。

第６講　PART2　確認問題

$a>1$ とする。定義域が $1\leqq x\leqq a$ である関数 $y=-x^2+6x-3$ について，次の問いに答えよ。

1 最大値を求めよ。答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$1<a<$ [ア] のとき

$x=$ [イ] で，最大値 [ウ] をとる。

[ア] $\leqq a$ のとき

$x=$ [エ] で，最大値 [オ] をとる。

① 1　② 2　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ 6
⑦ a　⑧ $-a^2+6a-3$

2 最小値を求めよ。答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$1<a<$ [カ] のとき

$x=$ [キ] で，最小値 [ク] をとる。

$a=$ [カ] のとき

$x=$ [ケ]，[コ] で，最小値 [サ] をとる。

[カ] $<a$ のとき

$x=$ [シ] で，最小値 [ス] をとる。

ただし，[ケ] < [コ] とする。

① 1　② 2　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ 6
⑦ a　⑧ $-a^2+6a-3$

PART2　２次関数の最大・最小（定義域の変化）

例題

$a>0$ とする。定義域が $0 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ より，グラフの軸は $x=2$

(1)(i)　$0<a<2$ のとき

この関数のグラフは右図(i)の実線部分。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-4a をとる。

(ii)　$2 \leqq a$ のとき

この関数のグラフは右図(ii)の実線部分。

よって，$x=2$ で最小値 -4 をとる。

(i)，(ii)より

$0<a<2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a

$2 \leqq a$ のとき　$x=2$ で最小値 -4

(2)　定義域 $0 \leqq x \leqq a$ の中央は $x=\dfrac{a}{2}$

(iii)　$\dfrac{a}{2}<2$ つまり $0<a<4$ のとき

この関数のグラフは右図(iii)の実線部分。

よって，$x=0$ で最大値 0 をとる。

(iv)　$\dfrac{a}{2}=2$　つまり $a=4$ のとき

この関数のグラフは右図(iv)の実線部分。

よって，$x=0,\ 4$ で最大値 0 をとる。

(v)　$2<\dfrac{a}{2}$　つまり $a>4$ のとき

この関数のグラフは右図(v)の実線部分。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-4a をとる。

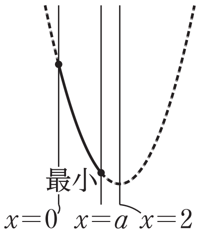
(iii)～(v)より

$0<a<4$ のとき　$x=0$ で最大値 0

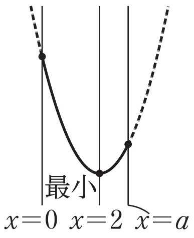
$a=4$ のとき　$x=0,\ 4$ で最大値 0

$a>4$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a

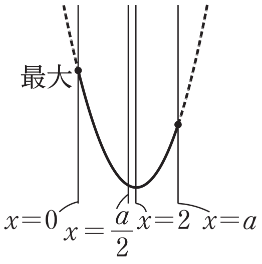
(i)



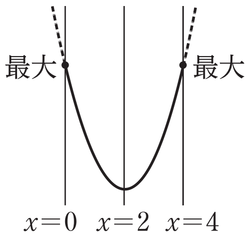
(ii)



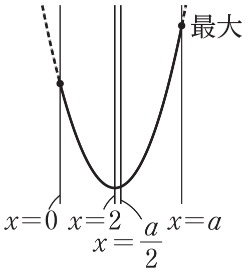
(iii)



(iv)



(v)



練習

$a>1$ とする。定義域が $1\leqq x\leqq a$ である関数 $y=x^2-6x-5$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$y=x^2-6x-5=(x-3)^2-14$ より，グラフの軸は $x=3$

(1)(i)　$1<a<3$ のとき

この関数のグラフは右図(i)の実線部分。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-6a-5 をとる。

(ii)　$3\leqq a$ のとき

この関数のグラフは右図(ii)の実線部分。

よって，$x=3$ で最小値 -14 をとる。

(i)，(ii)より

$1<a<3$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-6a-5

$3\leqq a$ のとき　$x=3$ で最小値 -14

(2)　定義域 $1\leqq x\leqq a$ の中央は $x=\dfrac{1+a}{2}$

(iii)　$\dfrac{1+a}{2}<3$ つまり $1<a<5$ のとき

この関数のグラフは右図(iii)の実線部分。

よって，$x=1$ で最大値 -10 をとる。

(iv)　$\dfrac{1+a}{2}=3$ つまり $a=5$ のとき

この関数のグラフは右図(iv)の実線部分。

よって，$x=1,\ 5$ で最大値 -10 をとる。

(v)　$3<\dfrac{1+a}{2}$　つまり $a>5$ のとき

この関数のグラフは右図(v)の実線部分。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-6a-5 をとる。

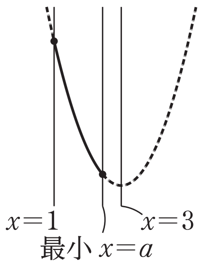
(iii)～(v)より

$1<a<5$ のとき　$x=1$ で最大値 -10

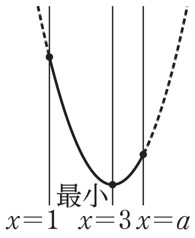
$a=5$ のとき　$x=1,\ 5$ で最大値 -10

$a>5$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-6a-5

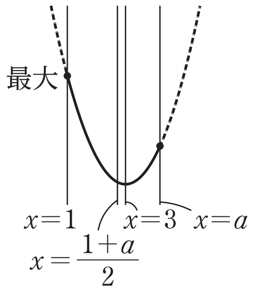
(i)



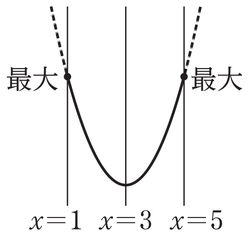
(ii)



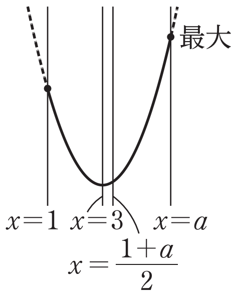
(iii)



(iv)



(v)



第 6 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：⑦，ウ：⑧，エ：③，オ：⑥

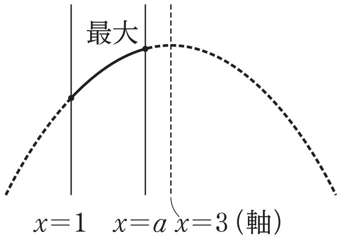
[解説]

$y=-x^2+6x-3=-(x^2-6x)-3$

$\quad=-(x-3)^2+6$

グラフの軸は　$x=3$

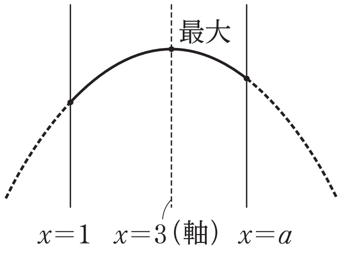
$1<a<3$ のとき，グラフは下図実線部分。 [A]



よって

$\qquad x=\boldsymbol{a}$ で　最大値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a-3}$ をとる

$3\leqq a$ のとき，グラフは下図実線部分。 [A]



よって

$\qquad x=\boldsymbol{3}$ で　最大値　$f(3)=\boldsymbol{6}$ をとる

[A]　定義域が変化する場合の最大
（グラフが上に凸の放物線の場合）
軸が定義域に含まれる場合と含まれない場合で場合分けを行う。

2 **[正解]** **カ：⑤，キ：①，ク：②，ケ：①，コ：⑤**

サ：②，シ：⑦，ス：⑧

[解説]

$y=-x^2+6x-3$

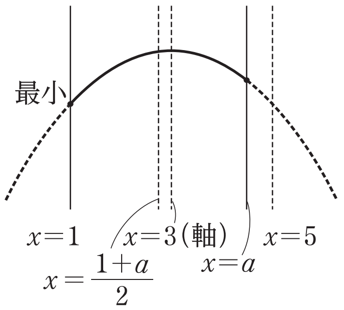
$\quad=-(x-3)^2+6$

グラフの軸は　$x=3$

定義域 $1\leqq x\leqq a$ の中央は　$x=\dfrac{1+a}{2}$

$\dfrac{1+a}{2}<3$　つまり　$1<a<\mathbf{5}$ のとき [B]

グラフは下図実線部分。

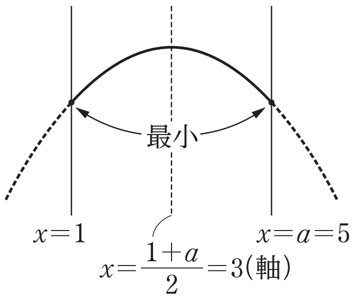


よって

$x=\mathbf{1}$ で　最小値　$f(1)=\mathbf{2}$ をとる

$\dfrac{1+a}{2}=3$　つまり　$a=\mathbf{5}$ のとき [B]

グラフは下図実線部分。



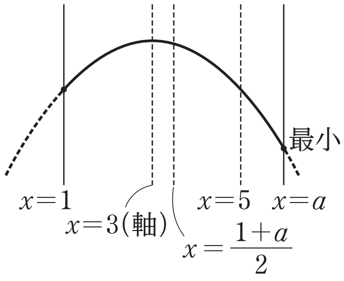
よって

$x=\mathbf{1},\ \mathbf{5}$ で　最小値　$f(1)=f(5)=\mathbf{2}$ をとる

[B]　定義域が変化する場合の最小
（グラフが上に凸の放物線の場合）
軸が定義域の中央にある場合を境目として場合分けを行う。

$3<\frac{1+a}{2}$　つまり　$\mathbf{5}<a$ のとき [B]

グラフは下図実線部分。



よって

$x=\boldsymbol{a}$ で　最小値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a-3}$ をとる